ПРОВОДИМОСТЬ ДВУМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С ДВОЯКО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

Сергей Рогозин[*,†], Екатерина Песетская, Геннадий Мишурис

[*] Белорусский государственный университет,
пр. Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

Fax: +375 17 209 53 32; Emails: rogosin@bsu.by; rogosinsv@gmail.com

[†] Докладчик

Международная научная конференция
“Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”,
посвященная И.Г.Петровскому, 29 мая–4 июня 2011,

МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия

Цель доклада:

♡ построить аналитическое решение задачи о проводимости двумерных нелинейных композиционных материалов с двоякопериодической структурой.

План доклада:

♠ постановка задачи;

♠ переход от квазилинейного к линейному уравнению, переформулировка краевых условий;

♠ введение комплексных потенциалов, запись краевых условий в комплексной форме;

♠ формулировка вспомогательных краевых задач и описание их решения;

♠ описание алгоритма построения решения задачи;

♠ обсуждение результатов.

Краткая история вопроса.

$\diamondsuit$ Релей (1892) & Максвел-Гарнетт (1904) – эффективные свойства неоднородной среды

$\diamondsuit$ Бердичевский (1975) & Бахвалов-Панасенко (1984) & Григолюк-Фильштинский (1992) – периодические композиты

$\diamondsuit$ Голден-Папаниколау (1993) & Жиков (1994) – гомегенизация случайной среды

$\diamondsuit$ Нгуетсенг (1989) & Аллэр (1992) & Жиков-Смышляев-Чередниченко (2000-2006) – двухмасштабная гомогенизация

$\diamondsuit$ Никоровичи-Макфедран (1996) –метод Релея

$\diamondsuit$ Митюшев (1998) – краевые задачи для аналитических функций

$\diamondsuit$ Линьков (1999-2009) – граничные интегральные уравнения

$\diamondsuit$ Телега-Токаржевский-Галка-Андрианов (2001) – нелинейные композиционные материалы

$\diamondsuit$ Мазья-Мовчан (2009-2011) – асимптотические разложения функции Грина

Математическая модель.

$T = T(x,y) \in \mathcal{C}^2(D_{matrix} \cup D_{inc}) \cap \mathcal{C}^1(cl(D_{matrix}) \cup cl(D_{inc}))$:

$$\nabla(\lambda(T)\nabla T) = 0,\ z \in D_{matrix}, \tag{1}$$

$$\nabla(\lambda_k(T)\nabla T) = 0,\ z \in \bigcup_{m_1,m_2} (D_k + m_1 + \imath m_2); \tag{2}$$

$$T(t) = T_k(t), \quad t \in \bigcup_{m_1,m_2\in\mathbb{Z}} (\partial D_k + m_1 + \imath m_2), \tag{3}$$

$$\lambda(T(t))\frac{\partial T(t)}{\partial n} = \lambda_k(T_k(t))\frac{\partial T_k(t)}{\partial n}, \quad t \in \bigcup_{m_1,m_2\in\mathbb{Z}} (\partial D_k + m_1 + \imath m_2); \tag{4}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \lambda\Big(T\Big(x,\tau\Big)\Big)T_y\Big(x,\tau\Big)d\tau = -A\sin\theta, \tag{5}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \lambda\Big(T\Big(\tau,y\Big)\Big)T_x\Big(\tau,y\Big)d\tau = -A\cos\theta. \tag{6}$$

Переход от квазилинейного к линейному уравнению.

$$f(T)=\int_0^T \lambda(\xi)\,d\xi, \quad f_k(T)=\int_0^T \lambda_k(\xi)\,d\xi, \quad k=1,\dots,N; \tag{7}$$

$$u(z)=f(T(z)), \quad u_k(z)=f_k(T(z)), \quad k=1,\dots,N. \tag{8}$$

$$\Delta u(z)=0, \quad z\in D_{matrix}, \tag{9}$$

$$\Delta u_k(z)=0, \quad z\in\bigcup(D_k+m_1+\imath m_2). \tag{10}$$

$$u(t)=f(f_k^{-1}(u_k(t))), \tag{11}$$

$$\frac{\partial u(t)}{\partial n}=\frac{\partial u_k(t)}{\partial n}, \quad t\in\bigcup(\partial D_k+m_1+\imath m_2). \tag{12}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} u_y\Big(x,\tau\Big)d\tau=-A\sin\theta, \tag{13}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} u_x\Big(\tau,y\Big)d\tau=-A\cos\theta. \tag{14}$$

Введение комплексных потенциалов.

Новые неизвестные (аналитические) функции $\varphi(z)$, $\varphi_k(z)$:

$$u(z) = \mathrm{Re}\left\{\varphi(z) + \alpha z\right\}, \tag{15}$$

$$\alpha = \alpha_1 + \imath\alpha_2, \quad \alpha_1 = -A\cos\theta, \quad \alpha_2 = A\sin\theta.$$

$$\varphi(z+1) - \varphi(z) = 0, \qquad \varphi(z+\imath) - \varphi(z) = 0.$$

$$v_k(z) = \mathrm{Im}\left\{\varphi_k(z)\right\}, \quad z \in D_k. \tag{16}$$

Нелинейное краевое условие

$$\varphi(t) = f\left(f_k^{-1}\left(\frac{\varphi_k(t) + \overline{\varphi_k(t)}}{2}\right)\right) + \frac{\varphi_k(t) - \overline{\varphi_k(t)}}{2} - \alpha t - \frac{\varphi_k(a_k) - \overline{\varphi_k(a_k)}}{2}, \ t \in \partial D_k. \tag{17}$$

Положим $\tau_k = \tau_k^{(0)} = 0$, $\lambda = \lambda(0) = \lambda^{(0)}$, $\lambda_k = \lambda_k(0) = \lambda_k^{(0)}$,

$\rho_k(\tau_k) = \rho_k^{(0)} = \frac{\lambda(\tau_k)-\lambda_k(\tau_k)}{\lambda(\tau_k)+\lambda_k(\tau_k)} = \frac{\lambda(0)-\lambda_k(0)}{\lambda(0)+\lambda_k(0)}$.

Вспомогательная задача в пространстве $\mathbf{X}$

$$\varphi_\alpha(t) = \varphi_{\alpha,k}(t) + \rho_k(\tau_k)\overline{\varphi_{\alpha,k}(t)} - \alpha t, \quad t \in \partial D_k, \tag{18}$$

$$\mathbf{X} = \mathcal{C}^2_{per}(D_0) \cap \mathcal{C}^1\left(D_0 \bigcup_{k=1}^{N} \partial D_k\right) \times \mathcal{C}^2(D_1) \cap \mathcal{C}^1(cl\, D_1) \times \ldots \times \mathcal{C}^2(D_N) \cap \mathcal{C}^1(cl\, D_N)$$

Новые неизвестные функции:

$$\widetilde{\varphi}(z) = \varphi(z) - \varphi_\alpha(z), \quad z \in D, \tag{19}$$

$$\widetilde{\varphi}_k(z) = \frac{\lambda(\tau_k) + \lambda_k(\tau_k)}{2\lambda_k(\tau_k)} \cdot \left[\varphi_k(z) - \varphi_k(a_k) - \frac{2\lambda_k(\tau_k)}{\lambda(\tau_k) + \lambda_k(\tau_k)}\varphi_{\alpha,k}(z)\right], \quad z \in D_k. \tag{20}$$

$$\widetilde{\varphi}(t) = \widetilde{\varphi}_k(t) + \rho_k(\tau_k)\overline{\widetilde{\varphi}_k(t)} + G_k\left(\widetilde{\varphi}_k, \overline{\widetilde{\varphi}_k}, \lambda, \lambda_k\right)(t), \quad t \in \partial\, D_k, \tag{21}$$

$$G_k\left(\widetilde{\varphi}_k, \overline{\widetilde{\varphi}_k}, \lambda, \lambda_k\right)(t) =$$

$$= f\left(f_k^{-1}\right)(f_k(T_k(t))) - \frac{\lambda(\tau_k)}{2\lambda_k(\tau_k)}\left[\varphi_k(t) - \varphi_k(a_k) + \overline{\varphi_k(t)} - \overline{\varphi_k(a_k)}\right] =$$

$$= f(T_k(t)) - \frac{\lambda(\tau_k)}{2(\lambda(\tau_k) + \lambda_k(\tau_k))}\left[\widetilde{\varphi}_k(t) + \overline{\widetilde{\varphi}_k(t)} + \varphi_{\alpha,k}(t) + \overline{\varphi_{\alpha,k}(t)}\right]. \tag{22}$$

Подставим

$$\widetilde{\varphi}_k(z) = \widetilde{\varphi}_k^{(0)}(z) \equiv 0, \quad \lambda = \lambda(0) = \lambda^{(0)}, \quad \lambda_k = \lambda_k(0) = \lambda_k^{(0)},$$

в G_k в (21) и положим $\rho_k = \rho_k(0) = \rho_k^{(0)}$ в (21).

Вспомогательная задача

$$G^{-,(0)}(t) - G_k^{+,(0)}(t) = G_k\left(\widetilde{\varphi}_k^{(0)}, \overline{\widetilde{\varphi}_k^{(0)}}, \lambda^{(0)}, \lambda_k^{(0)}\right)(t), \quad t \in \partial D_k. \tag{23}$$

$$\widetilde{\varphi}(t) - G^{-,(0)}(t) = \widetilde{\varphi}_k(t) + \rho_k^{(0)}\overline{\widetilde{\varphi}_k(t)} - G_k^{+,(0)}(t), \quad t \in \partial D_k,\ k = 1, \ldots, N. \tag{24}$$

$$
\Phi(z) = \begin{cases} \widetilde{\varphi}_k(z) + \sum\limits_{j=1}^{N} \sum\limits_{m_1,m_2}{}^{*} \rho_j^{(0)} W_{m_1,m_2,j} \widetilde{\varphi}_j(z) - G_k^{+,(0)}(z), z \in D_k, \\ \\ \widetilde{\varphi}(z) + \sum\limits_{j=1}^{N} \sum\limits_{m_1,m_2} \rho_j^{(0)} W_{m_1,m_2,j} - G^{-,(0)}(z), \quad z \in D_{matrix}, \end{cases} \tag{25}
$$

$$
W_{m_1,m_2,j} \widetilde{\varphi}_j^{(0)}(z) = \overline{\widetilde{\varphi}_j^{(0)} \left(\frac{r_k^2}{\overline{\overline{z - a_k - m_1 - \imath m_2}}} + a_k \right)}, \tag{26}
$$

$$
\sum_{j=1}^{N} \sum_{m_1,m_2}{}^{*} W_{m_1,m_2,j} := \sum_{j \neq k} \sum_{m_1,m_2} W_{m_1,m_2,j} + \sum_{m_1,m_2}{}' W_{m_1,m_2,k}. \tag{27}
$$

“Штрих” в $\sum\limits_{m_1,m_2}{}'$ означает, что суммирование распространяется на все m_1, m_2 за исключением $(m_1, m_2) = (0, 0)$.

Система функциональных уравнений:

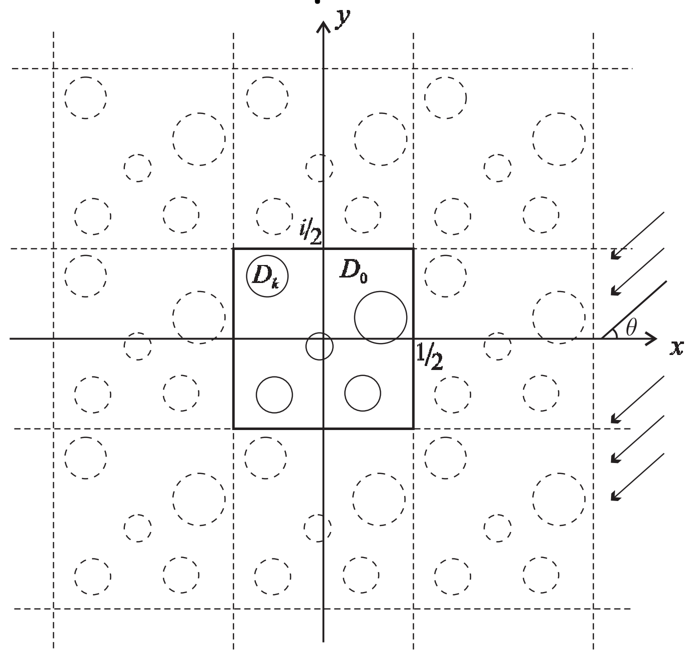
$$\widetilde{\varphi}_k(z) = -\sum_{j=1}^{N} \sum_{m_1,m_2}{}^{*} \rho_j^{(0)} W_{m_1,m_2,j} \widetilde{\varphi}_j(z) + G_k^{+,(0)}(z), z \in D_k. \qquad (28)$$

Новая линейная краевая задача (учитывающая первую аппроксимацию решения $\widetilde{\varphi}^{(1)}(z), \widetilde{\varphi}_k^{(1)}(z)$ и вычисленные значения параметров $\tau_k^{(1)} = T_k^{(1)}(a_k)$, $\lambda = \lambda(\tau_k^{(1)}) = \lambda^{(1)}$, $\lambda_k = \lambda_k(\tau_k^{(1)}) = \lambda_k^{(1)}$, и $\rho_k = \rho_k(\tau_k^{(1)}) = \rho_k^{(1)}$):

$$\widetilde{\varphi}(t) - G^{-,(1)} = \widetilde{\varphi}_k(t) + \rho_k^{(1)} \overline{\widetilde{\varphi}_k(t)} + G_k^{+,(1)}, \quad t \in \partial D_k,\ k = 1, \ldots, N. \qquad (29)$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Постановка задачи. Геометрия.



“Центральная” ячейка $Q_{(0,0)}$ двояко-периодического композита.

$$Q_{(m_1,m_2)} = Q_{(0,0)} + m_1 + \imath m_2 := \Big\{ z \in \mathbb{C} : z - m_1 - \imath m_2 \in Q_{(0,0)} \Big\}.$$

$$D_k := \{ z \in \mathbb{C} : |z - a_k| < r_k \},\ D_0 := Q_{(0,0)} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{N} D_k \cup \partial D_k \right).$$

Постановка задачи. Физические предположения.

Задача о стационарном потенциальном тепловом поле в двумерном двоякопериодическом композите; неизвестные - распределение температуры $T(x, y)$ и/или теплового потока $\mathbf{q}(x, y)$.

Предположения:

- проводимости матрицы $\lambda(T)$ и включений $\lambda_k(T)$ - ограниченные непрерывно-дифференцируемые функции на $\mathbb{R}$:

$$0 < \lambda^- \le \lambda(t) \le \lambda^+ < +\infty,$$

$$0 < \lambda_k^- \le \lambda_k(t) \le \lambda_k^+ < +\infty, \quad k = 1, \ldots, N;$$

$$|\lambda'(t)| \le \mu^+ < +\infty, \quad |\lambda_k'(t)| \le \mu_k^+ < +\infty, \quad k = 1, \ldots, N;$$

- идеальный контакт между компонентами композита;
- установившийся внешний поток на бесконечности, идущий в направлении θ к оси Ox.

Алгоритм построения решения задачи.

ШАГ 1. Положим $\tau_k = \tau_k^{(0)} = 0$, $\lambda = \lambda(0) = \lambda^{(0)}$, $\lambda_k = \lambda_k(0) = \lambda_k^{(0)}$, $\rho_k(\tau_k) = \rho_k^{(0)} = \frac{\lambda(\tau_k)-\lambda_k(\tau_k)}{\lambda(\tau_k)+\lambda_k(\tau_k)} = \frac{\lambda(0)-\lambda_k(0)}{\lambda(0)+\lambda_k(0)}$.

$\varphi_\alpha(z)$, $\varphi_{\alpha,k}(z)$ - единственное решение в пространстве $\mathbf{X}$ задачи

$$\varphi_\alpha(t) = \varphi_{\alpha,k}(t) + \rho_k(\tau_k)\overline{\varphi_{\alpha,k}(t)} - \alpha t, \quad t \in \partial D_k, \tag{30}$$

$$\mathbf{X} = \mathcal{C}^2_{per}(D_0) \cap \mathcal{C}^1\left(D_0 \bigcup_{k=1}^{N} \partial D_k\right) \times \mathcal{C}^2(D_1) \cap \mathcal{C}^1(cl\, D_1) \times \ldots \times \mathcal{C}^2(D_N) \cap \mathcal{C}^1(cl\, D_N)$$

Введем новые неизвестные функции.

$$\widetilde{\varphi}(z) = \varphi(z) - \varphi_\alpha(z), \quad z \in D, \tag{31}$$

$$\widetilde{\varphi}_k(z) = \frac{\lambda(\tau_k) + \lambda_k(\tau_k)}{2\lambda_k(\tau_k)} \cdot \left[\varphi_k(z) - \varphi_k(a_k) - \frac{2\lambda_k(\tau_k)}{\lambda(\tau_k) + \lambda_k(\tau_k)}\varphi_{\alpha,k}(z)\right], \quad z \in D_k, \tag{32}$$

Преобразуем краевое условие задачи (17):

$$\widetilde{\varphi}(t) = \widetilde{\varphi}_k(t) + \rho_k(\tau_k)\overline{\widetilde{\varphi}_k(t)} + G_k\left(\widetilde{\varphi}_k(t), \overline{\widetilde{\varphi}_k(t)}, \lambda, \lambda_k\right)(t), \quad t \in \partial\, D_k, \quad (33)$$

где

$$G_k\left(\widetilde{\varphi}_k(t), \overline{\widetilde{\varphi}_k(t)}, \lambda, \lambda_k\right)(t) =$$

$$= f\left(f_k^{-1}\right)(f_k(T_k(t))) - \frac{\lambda(\tau_k)}{2\lambda_k(\tau_k)}\left[\varphi_k(t) - \varphi_k(a_k) + \overline{\varphi_k(t)} - \overline{\varphi_k(a_k)}\right] =$$

$$= f(T_k(t)) - \frac{\lambda(\tau_k)}{2(\lambda(\tau_k) + \lambda_k(\tau_k))}\left[\widetilde{\varphi}_k(t) + \overline{\widetilde{\varphi}_k(t)} + \varphi_{\alpha,k}(t) + \overline{\varphi_{\alpha,k}(t)}\right]. \quad (34)$$

ШАГ 2. Подставим

$$\widetilde{\varphi}_k(z) = \widetilde{\varphi}_k^{(0)}(z) \equiv 0, \quad \lambda = \lambda(0) = \lambda^{(0)}, \quad \lambda_k = \lambda_k(0) = \lambda_k^{(0)},$$

в нелинейное слагаемое G_k в краевом условии (33) и положим также $\rho_k = \rho_k(0) = \rho_k^{(0)}$ в (33).

Решим в классе периодических функций вспомогательную задачу

$$G^{-,(0)}(t) - G_k^{+,(0)}(t) = G_k\left(\widetilde{\varphi}_k^{(0)}(t), \overline{\widetilde{\varphi}_k^{(0)}(t)}, \lambda^{(0)}, \lambda_k^{(0)}\right)(t), \quad t \in \partial\, D_k. \tag{35}$$

Получим следующую линейную краевую задачу, равносильную (33):

$$\widetilde{\varphi}(t) - G^{-,(0)}(t) = \widetilde{\varphi}_k(t) + \rho_k^{(0)}\overline{\widetilde{\varphi}_k(t)} - G_k^{+,(0)}(t), \quad t \in \partial\, D_k,\ k = 1, \ldots, N. \tag{36}$$

ШАГ 3. Решим задачу (36). Для этого введем функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} \widetilde{\varphi}_k(z) + \sum\limits_{j=1}^{N} \sum\limits_{m_1,m_2}{}^{*} \rho_j^{(0)} W_{m_1,m_2,j} \widetilde{\varphi}_j(z) - G_k^{+,(0)}(z), z \in D_k, \\ \\ \widetilde{\varphi}(z) + \sum\limits_{j=1}^{N} \sum\limits_{m_1,m_2} \rho_j^{(0)} W_{m_1,m_2,j} - G^{-,(0)}(z), \quad z \in D_{matrix}, \end{cases} \tag{37}$$

$$W_{m_1,m_2,j} \widetilde{\varphi}_j^{(0)}(z) = \overline{\widetilde{\varphi}_j^{(0)} \left(\frac{r_k^2}{\overline{\overline{z - a_k - m_1 - \imath m_2}}} + a_k \right)}, \tag{38}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{m_1,m_2}{}^{*} W_{m_1,m_2,j} := \sum_{j \neq k} \sum_{m_1,m_2} W_{m_1,m_2,j} + \sum_{m_1,m_2}{}' W_{m_1,m_2,k}. \tag{39}$$

“Штрих” в $\sum\limits_{m_1,m_2}{}'$ означает, что суммирование распространяется на все m_1, m_2 за исключением $(m_1, m_2) = (0, 0)$.

Из краевых условий следует, что эта функция тождественно равна нулю. Приходим к системе функциональных уравнений

$$\widetilde{\varphi}_k(z) = -\sum_{j=1}^{N} \sum_{m_1,m_2}{}^{*} \rho_j^{(0)} W_{m_1,m_2,j} \widetilde{\varphi}_j(z) + G_k^{+,(0)}(z), z \in D_k. \qquad (40)$$

Решение системы функциональных уравнений (28) дает первую аппроксимацию $\widetilde{\varphi}^{(1)}(z), \widetilde{\varphi}_k^{(1)}(z)$, с помощью которой вычисляется точки $\tau_k^{(1)} = T_k^{(1)}(a_k)$, значения $\lambda = \lambda(\tau_k^{(1)}) = \lambda^{(1)}$, $\lambda_k = \lambda_k(\tau_k^{(1)}) = \lambda_k^{(1)}$, и $\rho_k = \rho_k(\tau_k^{(1)}) = \rho_k^{(1)}$.

ШАГ 4 - ЦИКЛ.

Решим в пространстве $\mathbf{X}$ вспомогательную задачу (30) с $\tau_k = \tau_k^{(1)}$ и $\lambda = \lambda(\tau_k^{(1)}) = \lambda^{(1)}$, $\lambda_k = \lambda_k(\tau_k^{(1)}) = \lambda_k^{(1)}$, и $\rho_k = \rho_k(\tau_k^{(1)}) = \rho_k^{(1)}$, а также вспомогательную задачу (35), в краевом условии которой функция $\widetilde{\varphi}_k^{(0)}$ заменена на $\widetilde{\varphi}_k^{(1)}$, а также параметры $\lambda^{(0)}, \lambda_k^{(0)}$ заменены на $\lambda^{(1)}, \lambda_k^{(1)}$.

Делая соответствующие подстановки мы приходим к следующей краевой задаче, аналогичной (36):

$$\widetilde{\varphi}(t) - G^{-,(1)} = \widetilde{\varphi}_k(t) + \rho_k^{(1)} \overline{\widetilde{\varphi}_k(t)} + G_k^{+,(1)}, \quad t \in \partial D_k,\ k = 1, \ldots, N. \quad (41)$$

Решая краевую задачу (41), получим следующую аппроксимацию решения $\widetilde{\varphi}^{(2)}(z), \widetilde{\varphi}_k^{(2)}(z)$ и вычислим новые значения параметров.

И т.д.