



# Szybka wielobiegunowa metoda elementów brzegowych w analizie układów liniowosprężystych

## Przykłady analizy. Część 2.

dr inż. Jacek Ptaszny

Rzeszów, 15-16.04.2011



# Plan prezentacji

- 1 Wirujący krążek
- 2 Tarcza hamulcowa
- 3 Tarcza z otworem
- 4 Koło zębate
- 5 Literatura



# Plan prezentacji

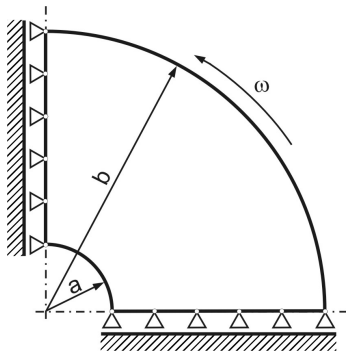
- 1 Wirujący krążek
- 2 Tarcza hamulcowa
- 3 Tarcza z otworem
- 4 Koło zębate
- 5 Literatura



# Wirujący krążek

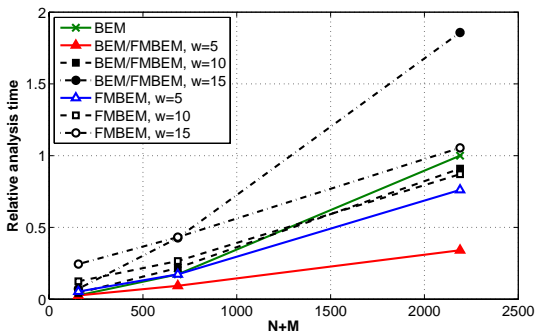
## Parametry modelu i metody

- $a=0.25$  m,  $b=1$  m
- $E = 200$  GPa,  $\nu=0.3$
- $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>
- $\omega = 100$  rad/s
- Płaski stan naprężenia
- Kwadratowe elementy brzegowe
- Trójkątne komórki wewnętrzne
- Liczba elementów:  $N=32, 64, 128$
- Liczba komórek:  $M=124, 622, 2062$
- $w = 5, 10, 15$
- Liczba komórek w liściu drzewa:
  - MEB/SWMEB: 10
  - SWMEB: 20, 80, 200





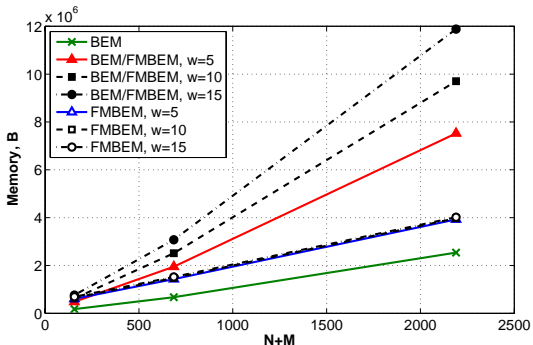
## Czas analizy



Czas analizy MEB/SWMEB jest krótszy w porównaniu z czasem MEB dla  $N + M = O(10^2)$ .



## Pamięć



Pamięć wymagana do analizy SWMEB jest większa w stosunku do pamięci MEB.



# Wirujący krążek

Względny błąd średniokwadratowy:

$$\varepsilon(f^{\text{num}}) = \frac{1}{\max|f^e|} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f_i^{\text{num}} - f_i^e)^2} \cdot 100\% \quad (1)$$

Wyniki MEB/SWMEB

Model no.	$\varepsilon(u_r),\%$		$\varepsilon(\sigma_t),\%$		$\varepsilon(\sigma_r),\%$	
	$w = 5$	$w = 10, 15$	$w = 5$	$w = 10, 15$	$w = 5$	$w = 10, 15$
1	0.23	0.23	0.24	0.24	2.39	2.30
2	0.06	0.05	0.10	0.07	0.91	0.62
3	0.02	0.01	0.11	0.03	0.51	0.16

Zastosowanie SWMEB tylko do obliczenia potencjału objętościowego wprowadza mały błąd rozwiązania.



# Wirujący krążek

## Względny błąd średniokwadratowy

$$\varepsilon(f^{\text{num}}) = \frac{1}{\max|f^e|} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f_i^{\text{num}} - f_i^e)^2} \cdot 100\% \quad (2)$$

## Wyniki SWMEB

Model no.	$\varepsilon(u_r), \%$		$\varepsilon(\sigma_t), \%$		$\varepsilon(\sigma_r), \%$	
	$w = 5$	$w = 10, 15$	$w = 5$	$w = 10, 15$	$w = 5$	$w = 10, 15$
1	2.11	2.10	5.44	5.42	4.33	4.30
2	0.44	0.44	1.62	1.63	6.66	6.54
3	0.31	0.31	1.90	1.90	5.41	5.24

Średni błąd naprężeń jest rzędu 1% i jest spowodowany zastosowaniem szeregów do obliczenia potencjałów brzegowych.





# Plan prezentacji

- 1 Wirujący krążek
- 2 Tarcza hamulcowa
- 3 Tarcza z otworem
- 4 Koło zębate
- 5 Literatura



# Tarcza hamulcowa motocykla

**Honda XL600V Transalp 1998**

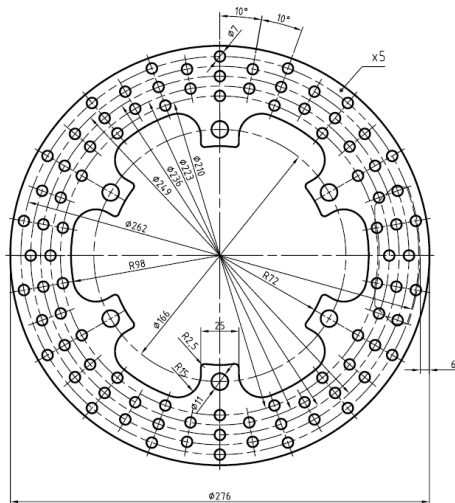




# Tarcza hamulcowa motocykla

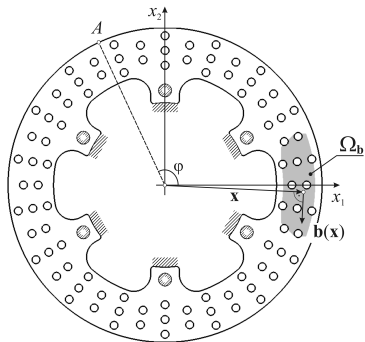
## Parametry modelu i metody

- Grubość  $g=5$  mm
- $E = 200$  GPa,  $\nu=0.3$
- Współczynnik tarcia kinetycznego  $\mu = 0.5$
- Nacisk wywierany przez klocki  $p = 1$  MPa
- PSN
- Kwadratowe elementy brzegowe
- Sześciowęgłowe komórki wewnętrzne
- Liczba elementów:  $N=1313$
- Liczba komórek:  $M=770$
- Liczba składników szeregu:  $w = 5, 10$





# Obciążenie i podparcie układu



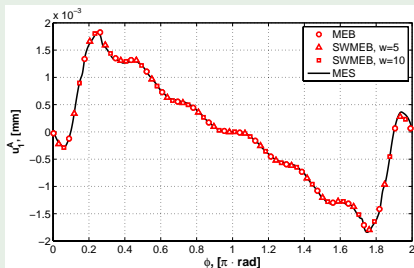
## Pole sił objętościowych

$$b_1(x_1, x_2) = -\frac{2\mu p}{g} \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad b_2(x_1, x_2) = \frac{2\mu p}{g} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_b \quad (3)$$

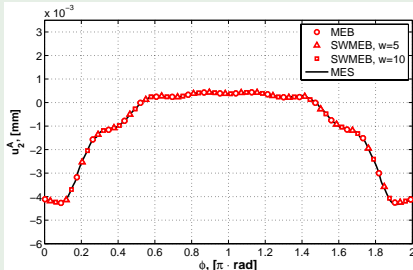


Porównanie z wynikami MES uzyskanymi dla modelu przestrzennego

### Przemieszczenia poziome



### Przemieszczenia pionowe

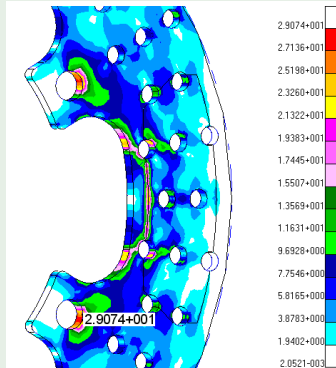


Przemieszczenia punktów leżących na obwodzie tarczy

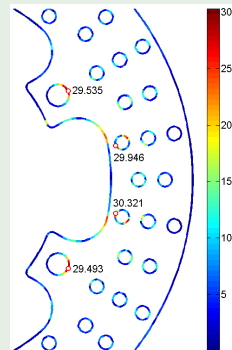


# Weryfikacja modelu

## Wyniki analizy MES



## Wyniki analizy SWMEB



Naprężenia redukowane Hubera, MPa



# Czas analizy i wymagana pamięć

## Czas analizy i pamięć

Metoda	Względny czas analizy		Pamięć, MB
	całkowity	potencjału objętościowego	
MEB	1.00	0.36	211.5
SWMEB, $w = 5$	0.89	0.05	30.8
SWMEB, $w = 10$	1.82	0.06	31.5

SWMEB jest bardziej efektywna niż MEB ze względu na czas analizy i wymaganą pamięć komputera.



# Wyniki naprężeń

## Parametry modeli MEB i MES

Model	Liczba elementów brzegowych	Liczba komórek wewnętrznych lub elementów skończonych*	Liczba stopni swobody
MEB	1313	770	5 252
MES	-	39 538	218 298

\*czworosiścienne 10-węzłowe elementy skończone dla modelu MES

## Max. naprężenia zredukowane

Metoda	Naprężenia, MPa
MEB	30.387
SWMEB, $w = 5$	30.321
SWMEB, $w = 10$	30.395
MES	29.074

Układ może być zamodelowany jako płaski, i analizowany za pomocą SWMEB bardziej efektywnie niż za pomocą MEB i MES.





# Plan prezentacji

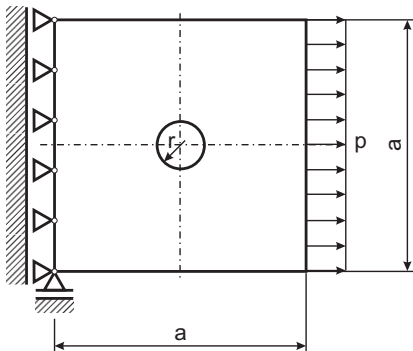
- 1 Wirujący krążek
- 2 Tarcza hamulcowa
- 3 Tarcza z otworem
- 4 Koło zębate
- 5 Literatura



# Tarcza z otworem

## Parametry modelu i metody

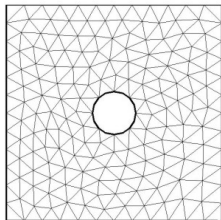
- $a = 1 \text{ m}$ ,  $r = 0.1 \text{ m}$
- $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$
- $p = 100 \text{ MPa}$
- Płaski stan naprężenia
- Kwadratowe elementy brzegowe
- Trójkątne komórki wewnętrzne - wizualizacja
- Trzy przypadki dyskretyzacji
- MEB - wielkości brzegowe, SWMEB - naprężenia wewnętrzne
- $w = 5, 10, 15$



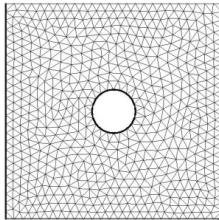


# Dyskretyzacja

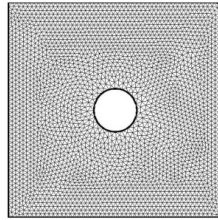
(1)



(2)



(3)



## Parametry modelu

L.p.	Liczba elementów brzegowych	Liczba punktów wewnętrznych
1	56	592
2	120	2220
3	220	10672

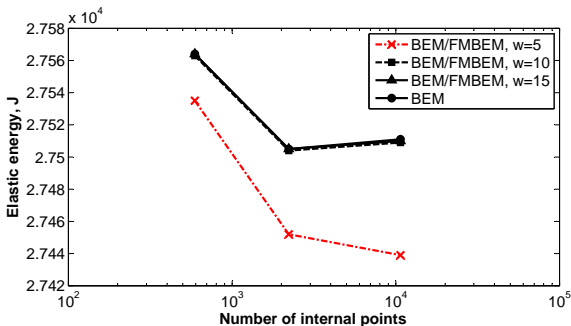


# Sprawdzenie wyników

## Energia sprężysta

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T E \sigma \, d\Omega \quad (4)$$

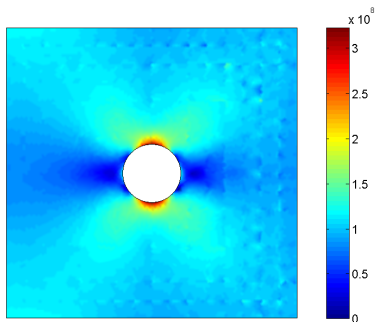
$E$  - macierz podatności materiału



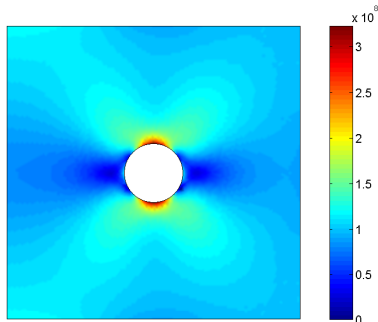


# Sprawdzenie wyników

Naprężenia redukowane wg hipotezy Hubera, MPa



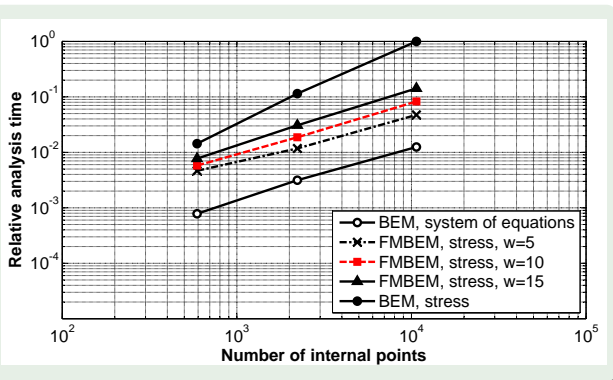
$w=5$



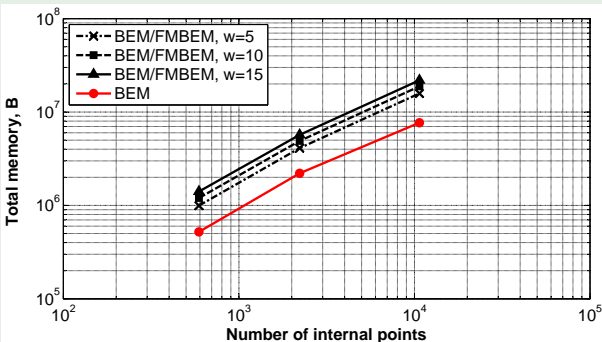
$w=10$



# Czas analizy



Zastosowanie SWMEB w analizie naprężeń wewnętrznych może zredukować czas obliczeń o rząd wielkości w stosunku do czasu MEB.



Wymagana pamięć SWMEB jest większa w stosunku do przypadku MEB z powodu konieczności zapisu struktury drzewa.



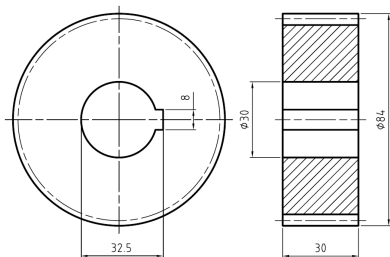
# Plan prezentacji

- 1 Wirujący krążek
- 2 Tarcza hamulcowa
- 3 Tarcza z otworem
- 4 Koło zębate
- 5 Literatura





# Koło zębate o zarysie ewolwentowym



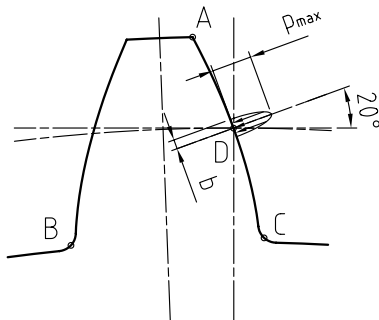
## Parametry uzębienia

Liczba zębów	40
Moduł normalny	2 mm
Kąt przyporu	20°
Średnica podziałowa	80 mm
Wysokość zęba	4.5 mm
Promień zaokrąglenia zarysu u podstawy zęba	0.4 mm



# Parametry układu

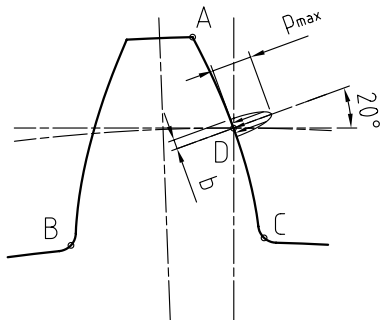
- Liczba zębów koła współpracującego: 80
- Siła obwodowa działająca na styku kół tocznych:  $F_o = 2670\text{N}$
- Pojedynczy ząb obciążony siłą powierzchniową, określoną teorią Hertza:  $p_{\max} = 602.7\text{MPa}$ ,  $b = 0.1\text{mm}$
- $E = 200\text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$
- PSO
- Długość elementów brzegowych na brzegu zewnętrznym  $\approx 2b$
- Liczba składników szeregu: 5, 10
- Utwierdzenie na brzegu wewnętrznym
- Dyskretyzacja fragmentu obszaru w celu wizualizacji naprężeń





# Parametry układu

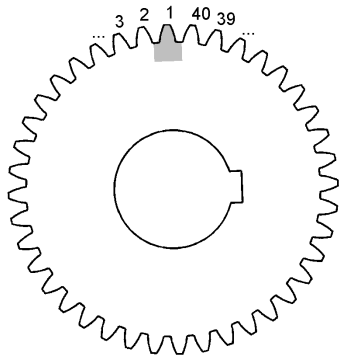
- Liczba zębów koła współpracującego: 80
- Siła obwodowa działająca na styku kół tocznych:  $F_o = 2670\text{N}$
- Pojedynczy ząb obciążony siłą powierzchniową, określoną teorią Hertza:  $p_{\max} = 602.7\text{MPa}$ ,  $b = 0.1\text{mm}$
- $E = 200\text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$
- PSO
- Długość elementów brzegowych na brzegu zewnętrznym  $\approx 2b$
- Liczba składników szeregu: 5, 10
- Utwierdzenie na brzegu wewnętrznym
- Dyskretyzacja fragmentu obszaru w celu wizualizacji naprężeń





# Parametry układu

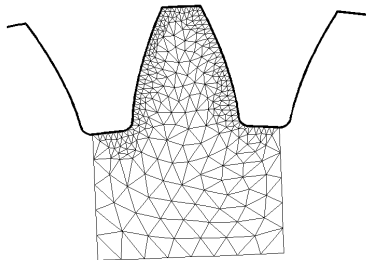
- Liczba zębów koła współpracującego: 80
- Siła obwodowa działająca na styku kół tocznych:  $F_o = 2670\text{N}$
- Pojedynczy ząb obciążony siłą powierzchniową, określoną teorią Hertza:  $p_{\max} = 602.7\text{MPa}$ ,  $b = 0.1\text{mm}$
- $E = 200\text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$
- PSO
- Długość elementów brzegowych na brzegu zewnętrznym  $\approx 2b$
- Liczba składników szeregu: 5, 10
- Utwierdzenie na brzegu wewnętrznym
- **Dyskretyzacja fragmentu obszaru w celu wizualizacji naprężeń**





# Parametry układu

- Liczba zębów koła współpracującego: 80
- Siła obwodowa działająca na styku kół tocznych:  $F_o = 2670\text{N}$
- Pojedynczy ząb obciążony siłą powierzchniową, określoną teorią Hertza:  $p_{\max} = 602.7\text{MPa}$ ,  $b = 0.1\text{mm}$
- $E = 200\text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$
- PSO
- Długość elementów brzegowych na brzegu zewnętrznym  $\approx 2b$
- Liczba składników szeregu: 5, 10
- Utwierdzenie na brzegu wewnętrznym
- **Dyskretyzacja fragmentu obszaru w celu wizualizacji naprężeń**





# Porównanie z wynikami MES

Modele MES (MSC.Patran/Nastran):

- 1 Model całego koła z węzłami brzegowym rozmieszczonymi tak samo jak w modelu MEB, obciążony tak samo jak model MEB.
- 2 Model pojedynczego zęba, odpowiadający zdyskretyzowanemu obszarowi modelu MEB, z liczbą węzłów brzegowych dziesięciokrotnie większą w porównaniu z modelem 1.

## Parametry modelu MEB

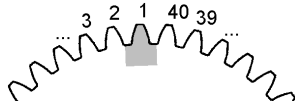
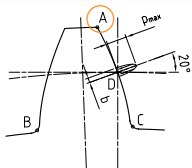
Liczba	Wartość
Elementów brzegowych	2688
Punktów wewnętrznych	1099
Komórek wewnętrznych	572
Stopni swobody układu	<b>10 752</b>

## Parametry modeli MES

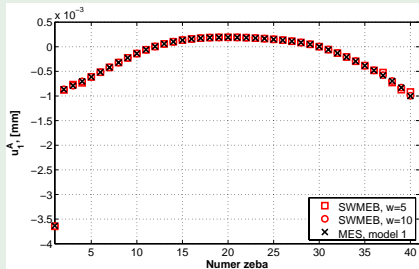
Nr	Model	Liczba elementów	Liczba stopni swobody
1	Całe koło	28 278	<b>118 008</b>
2	Pojedynczy ząb	14 831	<b>15 646</b>



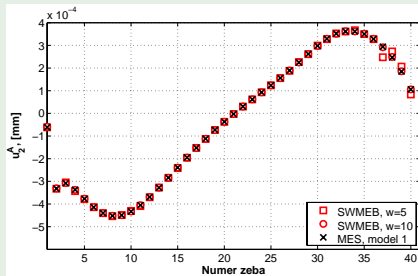
# Weryfikacja wyników przemieszczeń



## Przemieszczenie poziome naroży A zębów



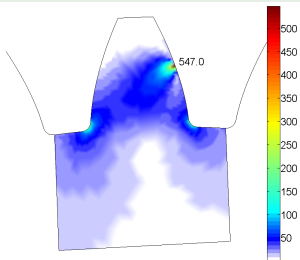
## Przemieszczenie pionowe naroży A zębów



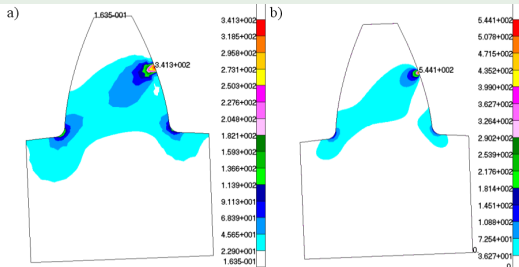


# Weryfikacja wyników naprężeń

Naprężenia redukowane Hubera (MPa) wyznaczone SWMEB



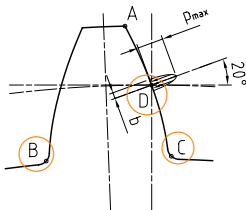
Naprężenia redukowane Hubera (MPa) wyznaczone MES:  
a) model 1., b) model 2.







# Porównanie naprężeń



## Naprężenia Hubera-Misesa w punktach B, C i D

Metoda	Naprężenia zredukowane (MPa) w punkcie		
	B	C	D
SWMEB, $w = 5$	160.2	137.3	547.0
SWMEB, $w = 10$	160.4	137.4	547.0
MES, model 1.	152.6	130.3	<b>341.3</b>
MES, model 2.	157.4	137.1	544.1



# Porównanie naprężeń

## Naprężenia Hubera-Misesa w punktach B, C i D

Metoda	Naprężenia zredukowane (MPa) w punkcie		
	B	C	D
SWMEB, $w = 5$	160.2	137.3	547.0
SWMEB, $w = 10$	160.4	137.4	547.0
MES, model 1.	152.6	130.3	<b>341.3</b>
MES, model 2.	157.4	137.1	544.1






SWMEB jest metodą dokładniejszą od MES, w analizie tych samych układów, oraz przy tym samym stopniu dyskretyzacji brzegu. Liczba stopni swobody modelu MEB jest przy tym o rząd wielkości mniejsza, w stosunku do modelu MES.



# Plan prezentacji

- 1 Wirujący krążek
- 2 Tarcza hamulcowa
- 3 Tarcza z otworem
- 4 Koło zębate
- 5 Literatura



-  Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z., *Wytrzymałość materiałów. Tom II*, WNT, Warszawa, 1997.
-  Ingber M.S., Mammoli A.A., Brown M.J., A comparison of domain integral evaluation techniques for boundary element methods, *Int J Numer Meth Engng*, 52, 417-432, 2001.
-  Ptaszny J. Fedeliński P., Szybka wielobiegunowa metoda elementów brzegowych w analizie układów obciążonych siłami objętościowymi, *Modelowanie Inżynierskie*, 35, 4, 107-114, 2008.
-  Ptaszny J., Fedeliński P., Fast multipole evaluation of domain terms in integral equations of two-dimensional elasticity, *Selected Topics of Contemporary Solid Mechanics, IFTR Reports*, Eds Kotulski Z., Kowalczyk P., Sosnowski W., Warsaw, 50-51, 2008.
-  Ptaszny J., Fedeliński P., Stress analysis of linear elastic structures by the fast multipole boundary element method, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 16, 3/4, 223-240, 2009.



# Dziękuję za uwagę

LaTeX Template based on Oxygen, <http://www.kde.org/kdeslides/>