



Szybka wielobiegunowa metoda elementów brzegowych w analizie układów liniowosprężystych

Algorytm SWMEB. Część 2.

dr inż. Jacek Ptaszny

Rzeszów, 15-16.04.2011



Plan prezentacji

- 1 Grupowanie i struktura drzewa
- 2 Obliczanie potencjałów
- 3 Algorytm metody i jego złożoność
- 4 Uwarunkowanie układu równań
- 5 Podsumowanie
- 6 Literatura

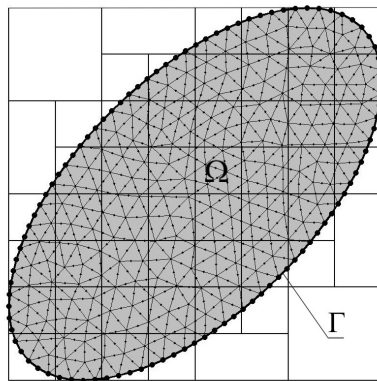
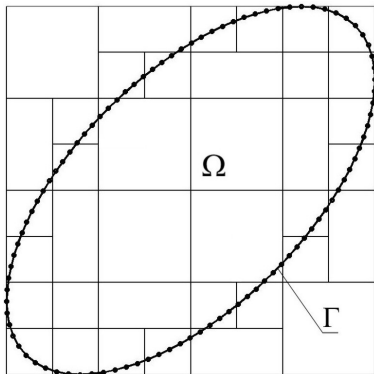


Plan prezentacji

- 1 Grupowanie i struktura drzewa
- 2 Obliczanie potencjałów
- 3 Algorytm metody i jego złożoność
- 4 Uwarunkowanie układu równań
- 5 Podsumowanie
- 6 Literatura



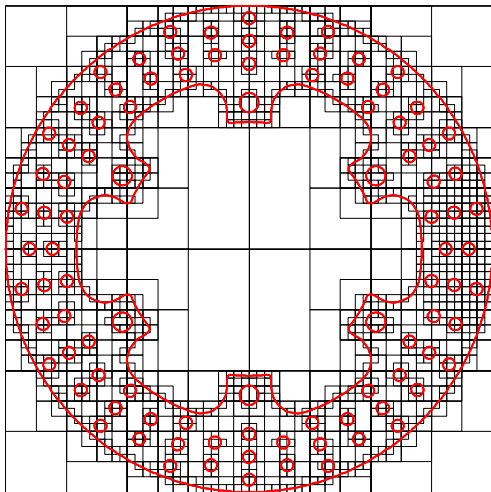
Grupowanie elementów i komórek





Grupowanie elementów i komórek

Przykład: geometria tarczy hamulcowej motocykla

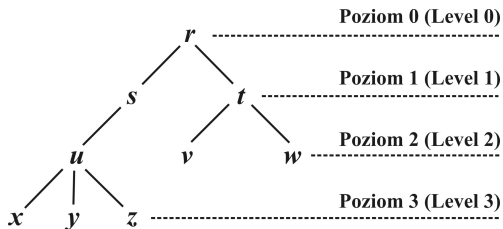




Struktura drzewa

Podstawowe określenia

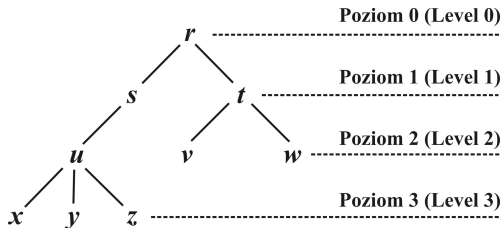
Drzewo to dowolny niezorientowany graf spójny i acykliczny.





Struktura drzewa

Podstawowe określenia

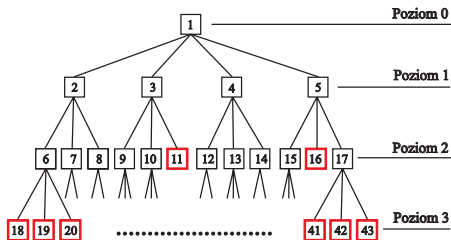
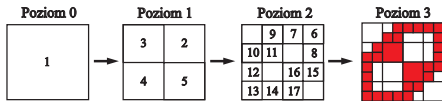
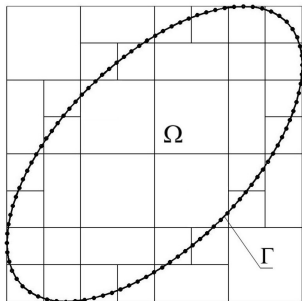


- r - **korzeń** drzewa
- s, t - **następniki** wężła r
- s - **poprzednik** wężła u
- v, w, x, y, z - **liście** drzewa



Grupowanie

Odwzorowanie za pomocą drzewa





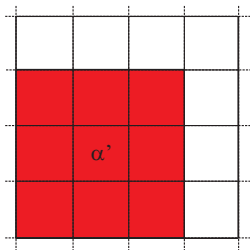
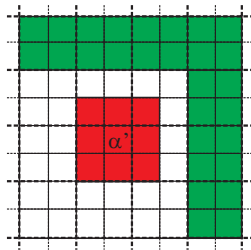
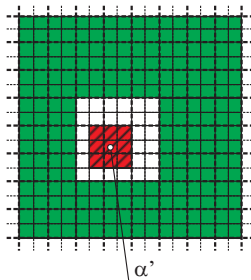
Plan prezentacji

- 1 Grupowanie i struktura drzewa
- 2 Obliczanie potencjałów
- 3 Algorytm metody i jego złożoność
- 4 Uwarunkowanie układu równań
- 5 Podsumowanie
- 6 Literatura



Obliczanie potencjałów

Definicje obszarów

Poziom $L-2$ Poziom $L-1$ Poziom L 

□ Obszar wpływu

■ Obszar bliski

■ Obszar wpływu poprzednika i jego przodków

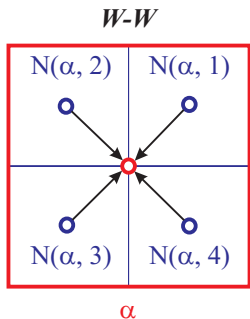
▨ Obszar bliski liścia

α' - obszar zawierający punkt kolokacji.



Obliczanie potencjałów

Transformacja W-W



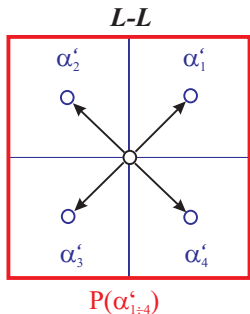
$$A_{j\alpha}^{(\cdot)}(k) = \sum_{i=1}^a \hat{A}_{jN(\alpha,i)}^{(\cdot)}(k), \quad B_{j\alpha}^{(\cdot)}(k) = \sum_{i=1}^a \hat{B}_{jN(\alpha,i)}^{(\cdot)}(k), \quad (1)$$

$N(\alpha, i)$ - i -ty następnik węzła α



Obliczanie potencjałów

Transformacja L-L



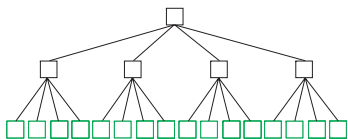
$$\left. \begin{aligned} E_{j\alpha'_i}^{(\cdot)}(k) &= \sum_{\alpha \in \bar{O}(\alpha'_i)} E_{j\alpha'_i}^{(\cdot)}(\alpha, k) + \check{E}_{jP(\alpha'_i)}^{(\cdot)}(k) \\ F_{j\alpha'_i}^{(\cdot)}(k) &= \sum_{\alpha \in \bar{O}(\alpha'_i)} F_{j\alpha'_i}^{(\cdot)}(\alpha, k) + \check{F}_{jP(\alpha'_i)}^{(\cdot)}(k) \end{aligned} \right\} \text{ dla } i = 1, \dots, a. \quad (1)$$

$\bar{O}(\alpha'_i)$ - obszar wpływu węzła α'_i , $P(\alpha'_i)$ - poprzednik węzła α'_i

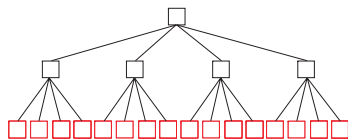


Obliczanie potencjałów

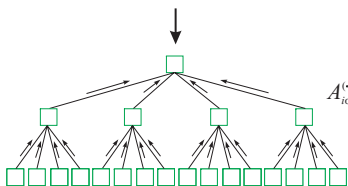
Kolejność transformacji



$$A_{ia}^{(i)}(k)$$

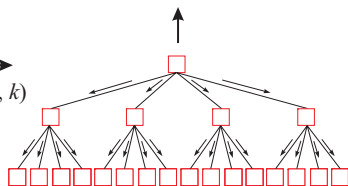


Obliczenie składników potencjałów



W-W

W-L
 $A_{ia}^{(i)}(k) \rightarrow E_{ia}^{(i)}(\alpha, k)$



L-L



Plan prezentacji

- 1 Grupowanie i struktura drzewa
- 2 Obliczanie potencjałów
- 3 Algorytm metody i jego złożoność
- 4 Uwarunkowanie układu równań
- 5 Podsumowanie
- 6 Literatura



Algorytm

Założenia do oszacowania złożoności czasowej

- Brak sił objętościowych.
- Elementy brzegowe są równomiernie rozmieszczone w obszarze kwadratowym. Liczba następników wszystkich węzłów wewnętrznych drzewa wynosi cztery.
- Każdemu z liści drzewa przypisanych jest dokładnie κ elementów brzegowych.



Algorytm

Założenia do oszacowania złożoności czasowej

- Operacje bezpośredniego całkowania numerycznego składników regularnych i osobliwych potencjałów wymagają takiego samego czasu.
- Liczba iteracji procedury rozwiązywania układu równań wynosi i^{\max} . Jest to maksymalna liczba iteracji przyjęta w warunku zakończenia procedury iteracyjnej.
- Liczba składników szeregu w wymagana dla zapewnienia żądanej dokładności rozwiązania nie zależy od liczby stopni swobody układu.



Algorytm

Założenia do oszacowania złożoności czasowej

Za operacje dominujące w kolejnych krokach przyjęto:

- Obliczenie wartości funkcji podcałkowej w operacjach numerycznego całkowania bezpośredniego.
- Operację transformacji pojedynczego momentu wielobiegunowego ($W-W$, $W-L$) lub lokalnego ($L-L$).
- Operację obliczenia składnika potencjału za pomocą szeregu lokalnego, dla pojedynczego punktu kolokacji.
- Operację mnożenia bloku macierzy odpowiadającego pojedynczemu punktowi kolokacji przez odpowiednie elementy macierzy jednokolumnowej szukanych wielkości brzegowych.



Algorytm

Założenia do oszacowania złożoności czasowej

Oznaczenia:

- P - liczba elementów brzegowych,
- m - liczba punktów kwadratury Gaussa,
- w - liczba składników szeregów,
- κ - maksymalna liczba elementów brzegowych w najmniejszym obszarze.

Więcej szczegółów w:

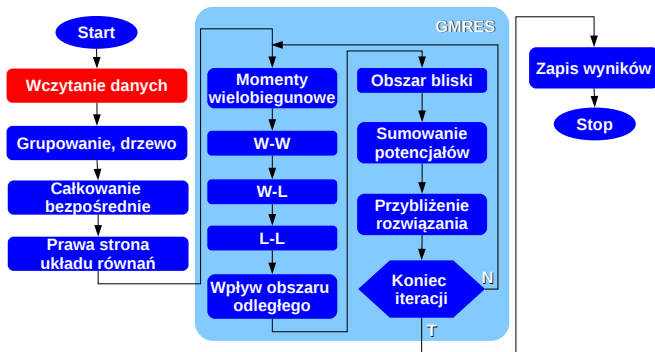
Ptaszny J., Szybka wielobiegunowa metoda elementów brzegowych w analizie układów liniowosprężystych. KWMiMKM, Politechnika Śląska, Gliwice 2009.



Algorytm

Schemat blokowy

1. Start. Wczytanie stałych materiałowych, współrzędnych węzłów brzegowych i punktów wewnętrznych, definicji elementów brzegowych i komórek wewnętrznych, warunków brzegowych oraz definicji sił objętościowych.

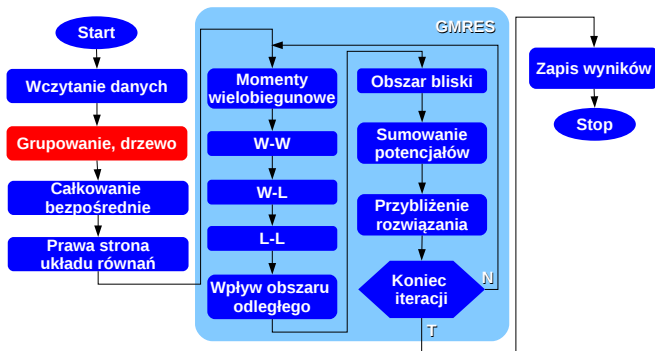




Algorytm

Schemat blokowy

2. Grupowanie elementów brzegowych i komórek wewnętrznych, utworzenie struktury drzewa.



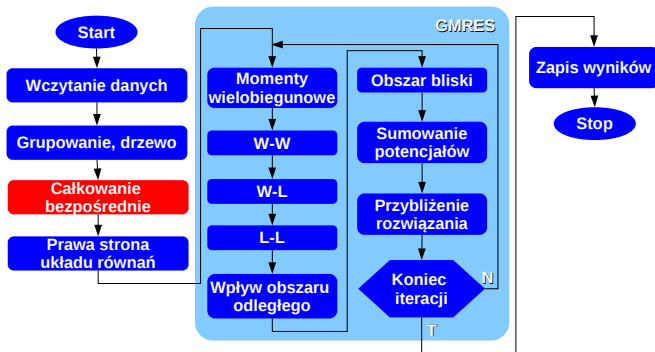


Algorytm

Schemat blokowy

3. Obliczenie elementów macierzy wpływu obszaru bliskiego. Liczba operacji dominujących:

$$36Pm_k + 2 \cdot (\text{Suma liczby operacji w krokach } 5 \div 10).$$



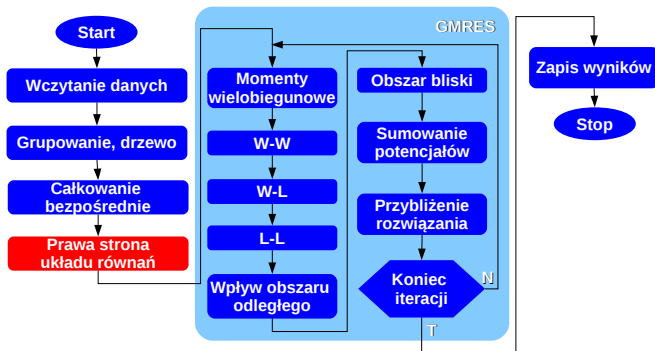


Algorytm

Schemat blokowy

4. Obliczenie elementów prawej strony równania macierzowego.
Liczba operacji dominujących:

Suma liczby operacji w krokach 5÷10.



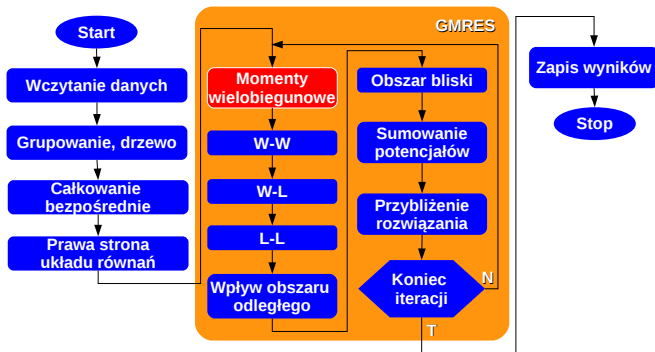


Algorytm

Schemat blokowy

5. Obliczenie momentów wielobiegunowych.
Liczba operacji dominujących:

$9Pmw.$





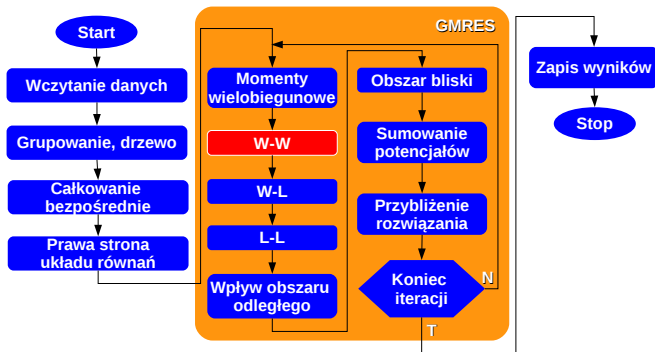
Algorytm

Schemat blokowy

6. Transformacja W-W.

Liczba operacji dominujących:

$$48Pw^2/\kappa.$$





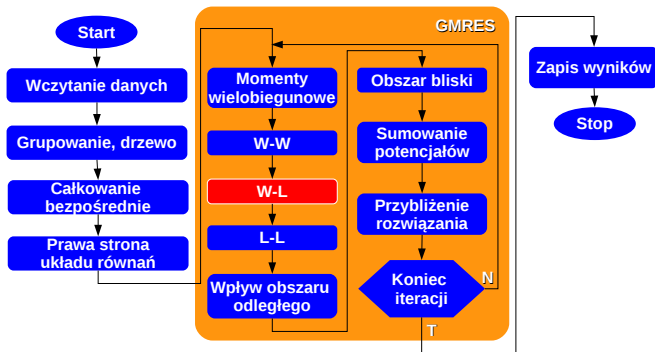
Algorytm

Schemat blokowy

7. Transformacja W-L.

Liczba operacji dominujących:

$$324Pw^2/k.$$

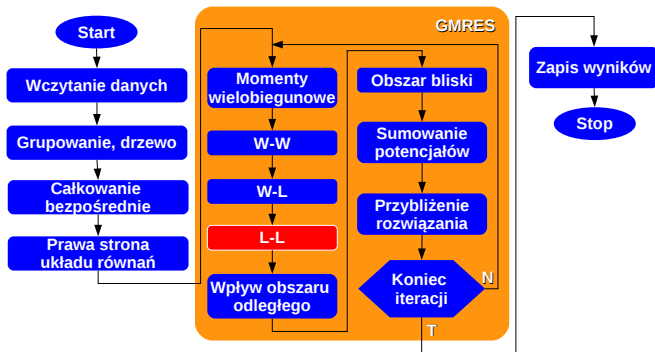




8. Transformacja $L-L$.

Liczba operacji dominujących:

$$48Pw^2/\kappa.$$



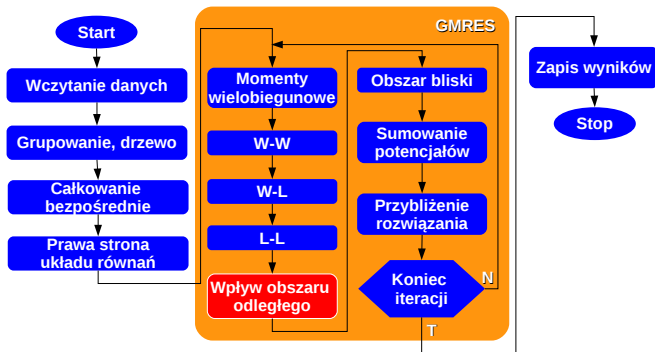


Algorytm

Schemat blokowy

9. Obliczenie składników potencjałów za pomocą szeregu lokalnego.
Liczba operacji dominujących:

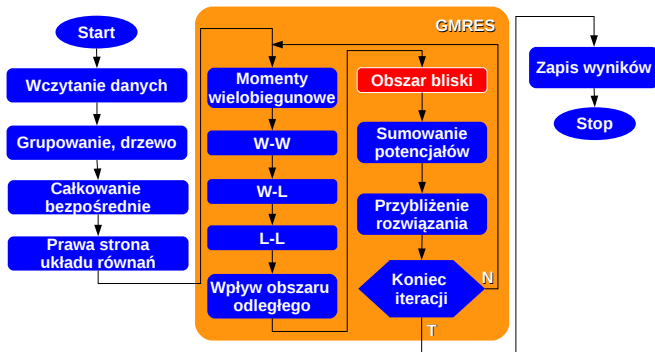
$18P_w$.





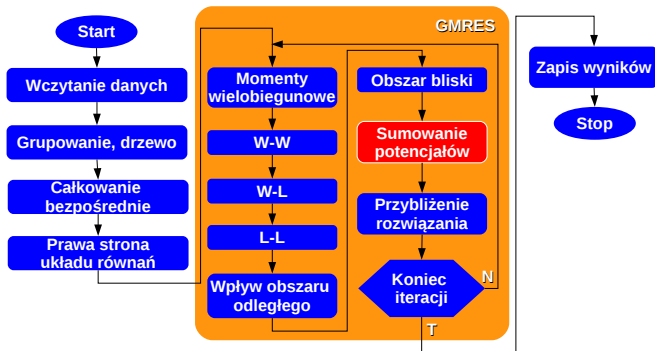
10. Obliczenie składników potencjałów pochodzących od obszaru bliskiego. Liczba operacji dominujących:

$36Pκ$.



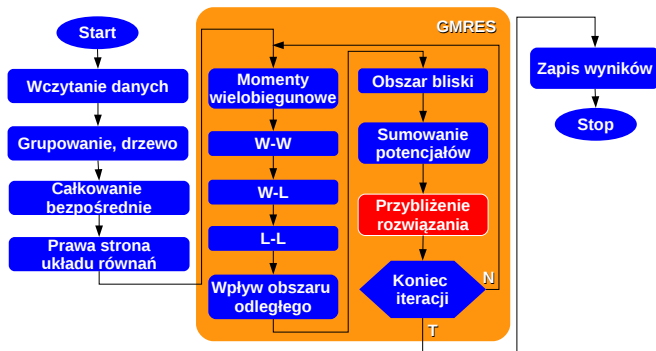


11. Sumowanie składników potencjałów.



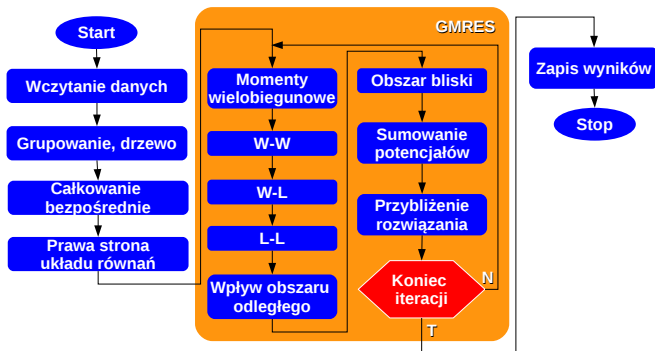


12. Wyznaczenie przybliżenia rozwiązania układu równań w kolejnej iteracji.





13. Sprawdzenie warunku zakończenia iteracyjnego rozwiązywania układu równań.

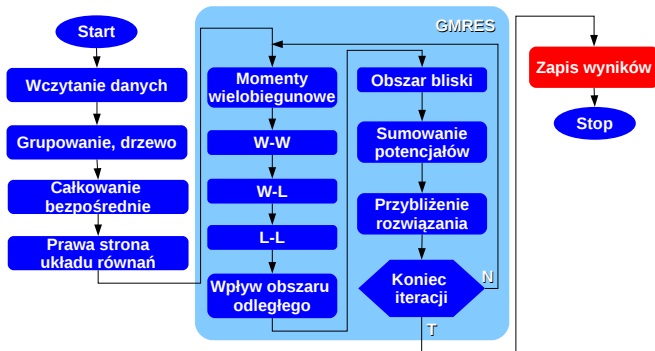




Algorytm

Schemat blokowy

14. Zapisanie rozwiązania i zakończenie działania programu.





Algorytm

Złożoność czasowa

Funkcja złożoności czasowej:

$$T = N \left[105(i^{\max} + 3) \frac{w^2}{\kappa} + 9(m + i^{\max} + 3)\kappa + (i^{\max} + 3)(2.25m + 4.5)w \right]. \quad (2)$$

- i^{\max} - maksymalna liczba iteracji,
- $N = 4P$ - liczba stopni swobody układu,
- P - liczba elementów brzegowych,
- m - liczba punktów kwadratury Gaussa,
- w - liczba składników szeregów,
- κ - maksymalna liczba elementów brzegowych w najmniejszym obszarze.



Funkcja złożoności czasowej:

$$T = N \left[105(i^{\max} + 3) \frac{w^2}{\kappa} + 9(m + i^{\max} + 3)\kappa + (i^{\max} + 3)(2.25m + 4.5)w \right]. \quad (2)$$

Transformacje momentów



Funkcja złożoności czasowej:

$$T = N \left[105(i^{\max} + 3) \frac{w^2}{\kappa} + 9(m + i^{\max} + 3)\kappa + (i^{\max} + 3)(2.25m + 4.5)w \right]. \quad (2)$$

Obliczanie wpływu obszaru bliskiego



Funkcja złożoności czasowej:

$$T = N \left[105(i^{\max} + 3) \frac{w^2}{\kappa} + 9(m + i^{\max} + 3)\kappa + (i^{\max} + 3)(2.25m + 4.5)w \right]. \quad (2)$$

Obliczanie momentów wielobiegunowych



Złożoność czasowa algorytmu

Optymalna wartość parametru κ

Pochodna funkcji T względem κ :

$$\frac{\partial T}{\partial \kappa} = N \left[-105(i^{\max} + 3) \frac{w^2}{\kappa^2} + 9(m + i^{\max} + 3) \right]. \quad (3)$$

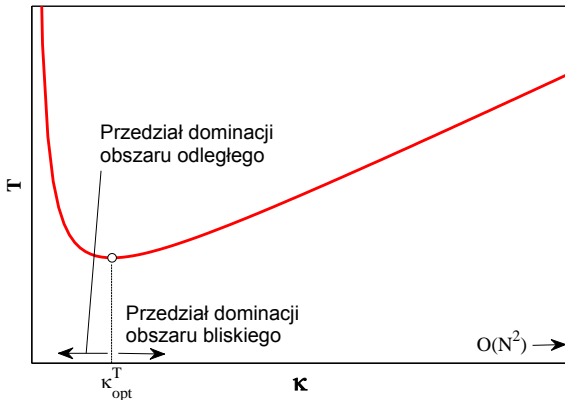
Miejsce zerowe pochodnej - minimum funkcji T :

$$\kappa_{\text{opt}}^T = w \cdot \sqrt{\frac{35(i^{\max} + 3)}{3(m + i^{\max} + 3)}}. \quad (4)$$



Złożoność czasowa algorytmu

Optymalna wartość parametru κ



Zależność funkcji złożoności czasowej od parametru κ



Podstawowe składniki zajmowanej pamięci:

- 1** Struktura drzewa. Liczba wierzchołków drzewa wynosi $4P/3\kappa$. Każdemu z węzłów przypisanych jest po 9 momentów wielobiegunowych i lokalnych (w sumie 18), które są liczbami zespolonymi. Liczba składników szeregu wynosi w . Każdy z momentów ma dwie składowe. **Liczba słów pamięci komputera:** $96Pw/\kappa$.
- 2** Niezerowe elementy macierzy wpływu obszaru bliskiego. Liczba punktów kolokacji wynosi $2P$. Na każdy punkt kolokacji przypada 18κ bloków o rozmiarze 2×2 . **Liczba słów pamięci komputera:** $144P\kappa$.



Podstawowe składniki zajmowanej pamięci:

- 3 Wektory lewej i prawej strony równania. Liczba wierszy każdego z dwóch wektorów wynosi $4P$. **Liczba słów pamięci komputera: $8P$.**
- 4 Wektory kolejnych rozwiązań. Składnik ten należy uwzględnić jeśli układ równań rozwiązywany jest jedną z metod wykorzystujących wektory przestrzeni Kryłowa (np. GMRES). **Liczba słów pamięci komputera: $j^{\max} \cdot 4P$.**



Funkcja złożoności pamięciowej:

$$M = N \left(24 \frac{w}{\kappa} + 36\kappa + i^{\max} + 2 \right). \quad (3)$$



Funkcja złożoności pamięciowej:

$$M = N \left(24 \frac{w}{\kappa} + 36\kappa + i^{\max} + 2 \right). \quad (3)$$

Struktura drzewa



Funkcja złożoności pamięciowej:

$$M = N \left(24 \frac{W}{\kappa} + 36\kappa + i^{\max} + 2 \right). \quad (3)$$

Macierze wpływu obszaru bliskiego



Funkcja złożoności pamięciowej:

$$M = N \left(24 \frac{W}{\kappa} + 36\kappa + i^{\max} + 2 \right). \quad (3)$$

Wektory



Złożoność pamięciowa algorytmu

Optymalna wartość parametru κ

Pochodna funkcji względem κ :

$$\frac{\partial M}{\partial \kappa} = N \left(-24 \frac{w}{\kappa^2} + 36 \right). \quad (4)$$

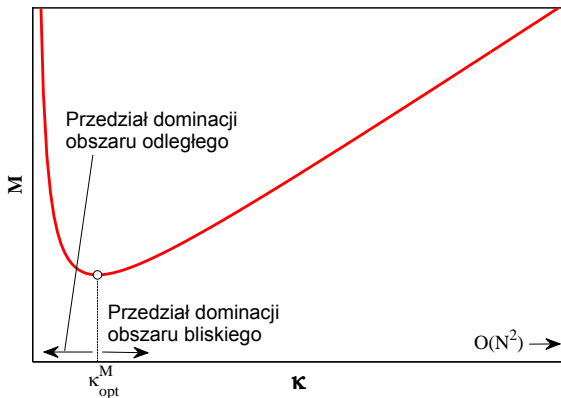
Miejsce zerowe pochodnej - minimum funkcji M :

$$\kappa_{\text{opt}}^M = \sqrt{\frac{2}{3} w}. \quad (5)$$



Złożoność pamięciowa algorytmu

Optymalna wartość parametru κ



Zależność funkcji złożoności pamięciowej od parametru κ



Plan prezentacji

- 1 Grupowanie i struktura drzewa
- 2 Obliczanie potencjałów
- 3 Algorytm metody i jego złożoność
- 4 Uwarunkowanie układu równań**
- 5 Podsumowanie
- 6 Literatura



Układ równań

Postać

Układ równań można rozwiązać **tylko metodą iteracyjną**.

Równanie w i -tej iteracji:

$$\{AX^i\} = \{Z\}. \quad (4)$$

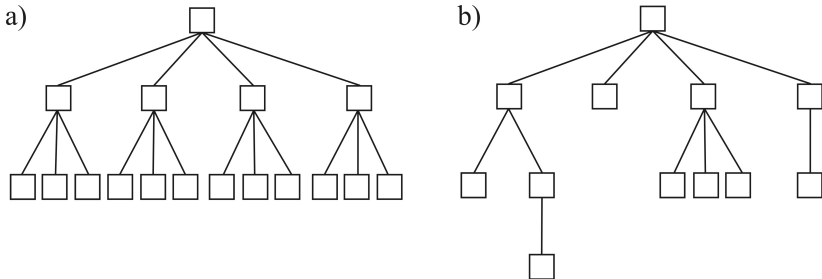
Najczęściej stosuje się metodę GMRES z poprawą uwarunkowania układu równań.

Wang H., Yao Z., Wang P., On the preconditioners for fast multipole boundary element methods for 2D multi-domain elastostatics, Eng Anal Bound Elem, 29, 673-688, 2005.



Układ równań

Wpływ struktury drzewa



Struktura drzewa zrównoważonego (a) niezrównoważonego (b)

Przy zrównoważonej strukturze drzewa układ równań jest lepiej uwarunkowany.



Układ równań

Poprawa uwarunkowania

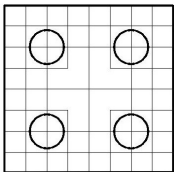
Równanie SWMEB:

$$\{AX^i\} = \{Z\} \quad (5)$$

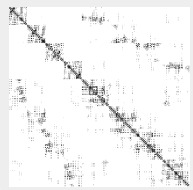
Poprawa uwarunkowania:

$$[M]\{AX^i\} = [M]\{Z\}, \quad [M] = [\bar{A}]^{-1}, \quad [\bar{A}] \approx [A]. \quad (6)$$

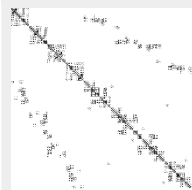
Geometria



[A]



[A]^{bl}



[̄A]



\bar{A} - macierz zawierająca wzajemny wpływ punktów należących do tego samego liścia drzewa.



Plan prezentacji

- 1 Grupowanie i struktura drzewa
- 2 Obliczanie potencjałów
- 3 Algorytm metody i jego złożoność
- 4 Uwarunkowanie układu równań
- 5 Podsumowanie**
- 6 Literatura



Podsumowanie

Porównanie MEB i SWMEB

MEB

- Pełne i niesymetryczne macierze.
- Czas analizy rzędu co najmniej $O(N^2)$.
- Układ równań rozwiązywany metodą bezpośrednią lub iteracyjną.
- Czas obliczeń i pamięć niezależne od geometrii układu i warunków brzegowych (dla stałego N).
- Dokładność zależna od błędów dyskretyzacji, interpolacji i całkowania (dla założonej geometrii i warunków brzegowych).

SWMEB

- Brak macierzy kwadratowych lub macierze rzadkie.
- Czas analizy rzędu $O(n)$.
- Układ równań rozwiązywany iteracyjnie; konieczna poprawa uwarunkowania układu równań.
- Czas obliczeń i pamięć zależne od geometrii układu, warunków brzegowych i parametrów metody (dla stałego N).
- Dokładność zależna dodatkowo od liczby składników szeregu i błędu metody iteracyjnej (dla założonej geometrii i warunków brzegowych).



Podsumowanie

Usprawnienia SWMEB

Metody:

- adaptacyjne grupowanie elementów (np. początkowy obszar prostokątny zamiast kwadratowego) (Bapat i Liu, 2010),
- zmodyfikowany sposób definicji obszaru bliskiego (Bapat i Liu, 2010),
- zastosowanie dodatkowych transformacji eksponencjalnych redukujących złożoność transformacji $W-L$ (Bapat i Liu, 2010),
- zastosowanie obliczeń równoległych (równoległe operacje na węzłach drzewa),
- ...







Bapat M.S., Y.J. Liu, A New Adaptive Algorithm for the Fast Multipole Boundary Element Method, *CMES*, 58, 2, 161-183, 2010.



Plan prezentacji

- 1 Grupowanie i struktura drzewa
- 2 Obliczanie potencjałów
- 3 Algorytm metody i jego złożoność
- 4 Uwarunkowanie układu równań
- 5 Podsumowanie
- 6 Literatura**



-  Banachowski L., Diks K., Rytter W., *Algorytmy i struktury danych*, WNT, Warszawa, 2006.
-  Bapat M.S., Y.J. Liu, A New Adaptive Algorithm for the Fast Multipole Boundary Element Method, *CMES*, 58, 2, 161-183, 2010.
-  Beatson R., Greengard L., A short course on fast multipole methods, <http://www.math.nyu.edu/faculty/greengar/>
-  Carrier J., Greengard L., Rokhlin V., A fast adaptive multipole algorithm for particle simulations, *SIAM J Sci Stat Comp*, 9, 4, 669-686, 1988.
-  Greengard L., Rokhlin V., A fast algorithm for particle simulations, *J Comput Phys*, 73, 325-348, 1987.
-  Liu Y.J., A new fast multipole boundary element method for solving large-scale two-dimensional elastostatic problems, *Int J Numer Meth Eng*, 65, 863-881, 2006.



Liu Y.J., Nishimura N., The fast multipole boundary element method for potential problems: A tutorial, *Eng Anal Bound Elem*, 30, 371-381, 2006.



Nishimura N., Fast multipole accelerated boundary integral equation methods, *Appl Mech Rev*, 55, 4, 299-324, 2002.



Rokhlin V., Rapid Solution of Integral Equations of Classical Potential Theory, *J Comput Phys*, 60, 187-207, 1983.



Wang H., Yao Z., Wang P., On the preconditioners for fast multipole boundary element methods for 2D multi-domain elastostatics, *Eng Anal Bound Elem*, 29, 673-688, 2005.



Yamada Y., Hayami K., A multipole boundary element method for two dimensional elastostatics, Tech. Report, METR 95-07, Math. Eng. Section, Dept. Math. Eng., Information. Phys., Univ. Tokyo, 1995.



Dziękuję za uwagę

LaTeX Template based on Oxygen, <http://www.kde.org/kdeslides/>